第28卷 第2期
2011年04月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 28 No. 2
Apr. 2011

文章编号:1005-3085(2011)02-0238-07

二阶周期边值问题正解的存在性

杨树勍

(忻州师范学院数学系，山西 忻州 034000)

摘 要: 周期边值问题已成为方程研究领域的一个重要分支，它在许多实际问题中有着更为广泛的应用，本文主要研究了二阶周期边值问题正解的存在性．利用锥上不动点指数理论研究了二阶周期边值问题方程组的正解的存在性，通过相应的线性问题的第一特征值和拓扑度乘积定理，建立了正解的存在性定理．最后，我们给出具体的例子说明了该正解存在性定理的结论．

关键词: 正解；周期边值问题；不动点指数；拓扑度

分类号: **AMS**(2000) 34K13 **中图分类号**: O175.14 **文献标识码**: A

1 引言

本文主要讨论方程组

$$\begin{cases} -u''(t)+Mu(t)=f_1\big(t,u(t)\big)+h_1\big(u(t),v(t)\big), & t\in[0,1],\\ -v''(t)+Mv(t)=f_2\big(t,v(t)\big)+h_2\big(u(t),v(t)\big), & t\in[0,1],\\ u(0)=u(1), \quad u'(0)=u'(1), \\ v(0)=v(1), \quad v'(0)=v'(1) \end{cases} \tag{1}$$

的正解的存在性，其中 $M\in(0,\pi^2)$．我们假设：

(H_1) $f_i:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是连续的，$i=1,2$．

(H_2)

$$\limsup_{u\to0^+}\max_{t\in[0,1]}\frac{f_1(t,u)}{u}<M<\liminf_{u\to+\infty}\min_{t\in[0,1]}\frac{f_1(t,u)}{u}.$$

(H_3)

$$\liminf_{v\to0^+}\min_{t\in[0,1]}\frac{f_2(t,v)}{v}>M>\limsup_{u\to+\infty}\max_{t\in[0,1]}\frac{f_2(t,v)}{v}.$$

(H_4)

$$\lim_{u\to0^+}\frac{h_1(u,v)}{u}=0$$

对任意 $v\in\mathbf{R}^+$ 是一致的．

(H_5)

$$\lim_{v\to+\infty}\frac{h_2(u,v)}{v}=0$$

对任意 $u\in\mathbf{R}^+$ 是一致的，又

$$\lim_{u\to+\infty}h_2(u,v)=0$$

收稿日期: 2009-04-01. **作者简介**: 杨树勍(1963年11月生)，女，副教授. 研究方向：非线性泛函分析.

对任意 $N>0$，任意 $v\in[0,N]$ 是一致的.

从条件中可以看到：f_1 和 h_1 是超线性的，而 f_2 和 h_2 是次线性的.

在第二部分，我们在 $C[0,1]\times C[0,1]$ 中直接构造一个锥 $K_1\times K_2$，然后在 $K_1\times K_2$ 中应用不动点指数的乘积来证明正解的存在性. 这与以往的做法有很大的不同：例如文献 [1] 中，作者直接假设方程组中的两个非线性项要么都是超线性的，要么都是次线性的. 这就要求等价的积分算子对两个方程中的非线性项有相同的拉伸和压缩情况. 本文受文献 [2,3] 的启发，克服了这种情况.

2 预备知识

我们给出一些预备知识及引理，这些对本文主要定理的证明是至关重要的.

$C[0,1]$ 表示连续函数空间，其范数为

$$\|u\| = \max_{t\in[0,1]}|u(t)|, \quad u\in C[0,1],$$

则赋范线性空间 $(C[0,1],\|\cdot\|)$ 为 Banach 空间，$C^+[0,1]=\{u\in C[0,1]: u(t)\geqslant 0,\ t\in[0,1]\}$ 是 $C[0,1]$ 中的锥.

引理 1[4] 设 $M\in(0,\pi^2)$，则对任意给定的 $h\in C[0,1]$，二阶线性周期边值问题

$$\begin{cases} -u''(t)+Mu(t)=h(t), & t\in[0,1],\\ u(0)=u(1), \quad u'(0)=u'(1), \end{cases} \tag{2}$$

存在唯一解 $u=Hh$，其中 $H: C[0,1]\to C[0,1]$ 为线性全连续算子.

证明 设

$$r(t)=\frac{\cos h\beta(t-\frac{1}{2})}{2\beta\sin h\frac{\beta}{2}}, \quad t\in[0,1],$$

其中 $\beta=\sqrt{M}$, $\alpha_0=\frac{1}{2\beta\sin h\frac{\beta}{2}}$，显然 $r(t)\in C^2[0,1]$, $r(t)\geqslant 0$ 是二阶线性边值问题

$$-r''(t)+Mr(t)=0, \quad r(0)=r(1), \quad r'(0)=r'(1)-1 \tag{3}$$

的唯一解，且满足不等式

$$\frac{1}{2\beta\sin h\frac{\beta}{2}}\leqslant r(t)\leqslant\frac{\cos h\frac{\beta}{2}}{2\beta\sin h\frac{\beta}{2}}.$$

作函数 $G:[0,1]\times[0,1]\to[0,+\infty)$ 如下

$$G(t,s)=\begin{cases} r(t-s), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ r(1+t-s), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1. \end{cases}$$

任给 $u\in C[0,1]$，作算子 $H: C[0,1]\to C[0,1]$ 如下

$$(Hu)(t)=\int_0^1 G(t,s)u(s)\mathrm{d}s.$$

易证 $H: C[0,1]\to C[0,1]$ 为线性全连续算子，且根据最大值原理知

$$u(t)=(Hu)(t)=\int_0^1 G(t,s)u(s)\mathrm{d}s$$

为方程 (3) 的唯一解.

注 1 (i) 直接计算可得

$$\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}t = \frac{1}{M}.$$

(ii) 易知

$$\max_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} G(t,s) = \alpha_0.$$

由引理 1 和注 1，我们定义

$$K = \Big\{u \in C^+[0,1] : \int_0^1 u(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{M\alpha_0}\|u\|\Big\},$$

$$K_r = \big\{u \in K : \|u\| < r\big\}, \quad \partial K_r = \big\{u \in K : \|u\| = r\big\}, \quad r > 0.$$

任给 u, $v \in C^+[0,1]$，我们定义算子 A_v, $B_u : C^+[0,1] \to C^+[0,1]$, $T : C^+[0,1] \times C^+[0,1] \to C^+[0,1] \times C^+[0,1]$ 如下

$$A_v u(t) = \int_0^1 G(t,s)\big(f_1(s,u(s)) + h_1(u(s),v(s))\big)\mathrm{d}s,$$

$$B_u v(t) = \int_0^1 G(t,s)\big(f_2(s,v(s)) + h_2(u(s),v(s))\big)\mathrm{d}s,$$

$$T(u,v)(t) = \big(A_v u(t), B_u v(t)\big).$$

显然，若 T 在 $C^+[0,1] \times C^+[0,1]$ 中有非平凡不动点，则方程组 (1) 有正解存在.

引理 2 $T : K \times K \to K \times K$ 是全连续的.

证明 对任意的 $(u,v) \in K \times K$，要证 $T(u,v) \in K \times K$，即证 $A_v u \in K$, $B_u v \in K$. 由注 1 知

$$\begin{aligned}\int_0^1 A_v u(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 \Big[\int_0^1 G(t,s)\big(f_1(s,u(s)) + h_1(u(s),v(s))\big)\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \big(f_1(s,u(s)) + h_1(u(s),v(s))\big)\mathrm{d}s \int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{M}\int_0^1 \big(f_1(s,u(s)) + h_1(u(s),v(s))\big)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|A_v u\| &= \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\big(f_1(s,u(s)) + h_1(u(s),v(s))\big)\mathrm{d}s \\ &\leqslant \alpha_0 \int_0^1 \big(f_1(s,u(s)) + h_1(u(s),v(s))\big)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

从而

$$\int_0^1 A_v u(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{M\alpha_0}\|A_v u\|.$$

同理可得

$$\int_0^1 B_u v(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{M\alpha_0}\|B_u v\|.$$

所以 $A_v u \in K$, $B_u v \in K$，从而 $T(u,v) \in K \times K$. 由引理1，T 显然是全连续的.

下面，我们回忆一些有关不动点指数的概念和引理，这对我们主要定理的证明是关键的.

令 E 是一个实Banach空间，$P \subset E$ 是一个锥. 设 Ω 是 E 中的一个有界开集，如果 $A: P \cap \overline{\Omega} \to P$ 是一个全连续算子，且 $Au \neq u$, $u \in P \cap \partial\Omega$，则不动点指数 $i(A, P \cap \Omega, P)$ 有意义. 另外，关键的是如果 $i(A, P \cap \Omega, P) \neq 0$，则 A 在 $P \cap \Omega$ 中有一个不动点.

任给 $r > 0$，令 $P_r = \{u \in P : \|u\| < r\}$, $\partial P_r = \{u \in P : \|u\| = r\}$，则有以下引理.

引理3[5]　设 $A : \overline{P}_r \to P$ 是全连续的，则

1)　如果 $\mu Au \neq u$, $u \in \partial P_r$, $\mu \in (0,1]$，则必有 $i(A, P_r, P) = 1$;

2)　如果存在 $\phi \in P$, $\phi \neq 0$，使得 $u \neq Au + \mu\phi$, $u \in \partial P_r$, $\mu \geqslant 0$，则 $i(A, P_r, P) = 0$.

引理4[1]　令 Ω_i 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界开集，$f_i \in C^2(\overline{\Omega}_i, \mathbf{R}^n)$, $p_i \in \mathbf{R}^n \backslash f_i(\partial\Omega_i)$, $i = 1,2$，那么有

$$\deg\big(f, \Omega_1 \times \Omega_2, (p_1, p_2)\big) = \deg(f_1, \Omega_1, p_1) \cdot \deg(f_2, \Omega_2, p_2), \tag{4}$$

这里 $f(x,y) = (f_1(x), f_2(y))$.

注2　公式(4)对Brouwer度，Leray-Schauder度和锥中不动点指数都是成立的.

引理5[1]　设 E 是一个Banach空间，$K_i \in E$, $i = 1,2$，是 E 中的锥. 对任意 $r_i > 0$，定义 $K_{r_i} = \{u \in K_i : \|u\| < r_i\}$, $\partial K_{r_i} = \{u \in K_i : \|u\| = r_i\}$. 如果 $A_i : K_i \to K_i$ 是全连续的，且 $u_i \neq A_i u_i$, $u_i \in \partial K_{r_i}$，则

$$i(A_1, K_{r_1} \times K_{r_2}, K_1 \times K_2) = i(A_1, K_{r_1}, K_1) \cdot i(A_2, K_{r_2}, K_2),$$

这里 $A(u,v) = (A_1 u, A_2 v)$, $(u,v) \in K_1 \times K_2$.

3　主要定理及其证明

定理1　假设 (H_1)-(H_5) 成立，则方程组(1)至少有一个正解.

证明　由条件 (H_2), (H_4) 知，存在 $r_0 > 0$, $\varepsilon > 0$，使得当 $u \in [0, r_0]$ 时

$$f_1(t,u) \leqslant M(1-\varepsilon)u, \quad t \in [0,1], \tag{5}$$

$$h_1(u,v) \leqslant \frac{M}{2} \cdot \varepsilon u, \quad v \in \mathbf{R}^+.$$

取 $r_1 \in (0, r_0)$，下证

$$\mu A_v u \neq u, \quad u \in \partial K_{r_1}, \quad \mu \in (0,1]. \tag{6}$$

我们用反证法来证明. 否则如果存在 $u_0 \in \partial K_r$, $\mu_0 \in (0,1]$，使得 $\mu_0 A_v u_0 = u_0$，则 $u_0 \leqslant A_v u_0$. 从0到1对不等式两边积分，并注意到(5)式，得

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u_0(t)\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^1 A_v u_0(t)\mathrm{d}t = \int_0^1\int_0^1 G(t,s)\big(f_1(s,u_0(s)) + h_1(u_0(s),v(s))\big)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{M}\int_0^1 \big(f_1(s,u_0(s)) + h_1(u_0(s),v(s))\big)\mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{1}{M}\int_0^1 \Big(M(1-\varepsilon)u_0(s) + \frac{M}{2}\cdot\varepsilon u_0(s)\Big)\mathrm{d}s = \Big(1-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\int_0^1 u_0(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

注意到 $u_0 \in \partial K_{r_1}$，从而

$$\int_0^1 u_0(t)\mathrm{d}t > 0.$$

两边消去 $\int_0^1 u_0(t)\mathrm{d}t$，即得 $1 \leqslant 1-\varepsilon/2$. 这不可能，从而 (6) 式成立. 由引理3得 $i\,(A_v, K_{r_1}, K) = 1$, $r \in (0, r_0)$.

另一方面，由 (H_2) 知

$$f_1(t,u) \geqslant M(1+\varepsilon)u - C, \quad t \in [0,1], \quad u \geqslant 0, \tag{7}$$

C 为某个正常数. 取 $R_1 > \max\{C\alpha_0/\varepsilon, r_0\}$，下证

$$u \neq A_v u + \mu \cdot \phi, \quad u \in \partial K_{R_1}, \quad \mu \geqslant 0, \quad \phi \in K \setminus \{\theta\}. \tag{8}$$

事实上，如果存在 $u_0 \in \partial K_{R_1}$, $\mu_0 \geqslant 0$，使得 $u_0 = A_v u_0 + \mu_0 \cdot \phi$，则 $u_0 \geqslant A_v u_0$，从0到1对不等式两边积分，并注意到 (7) 式，有

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(t)\mathrm{d}t \ &\geqslant \int_0^1 A_v u_0(t)\mathrm{d}t = \int_0^1\int_0^1 G(t,s)\big[f_1(s,u_0(s)) + h_1(u_0(s),v(s))\big]\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ &\geqslant \ \frac{1}{M}\int_0^1 M(1+\varepsilon)u_0(s)\mathrm{d}s - \frac{C}{M},\end{aligned}$$

即有

$$\varepsilon\int_0^1 u_0(t)\mathrm{d}t \leqslant C/M.$$

我们知

$$\int_0^1 u_0(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{M\alpha_0}\|u\| = \frac{R_1}{M\alpha_0},$$

所以应有 $\frac{C}{M\cdot\varepsilon} \geqslant \frac{R_1}{M\alpha_0}$，即 $R_1 \leqslant \frac{\alpha_0\cdot C}{\varepsilon}$. 这与 R_1 的选取矛盾，所以 (8) 式成立. 由引理3得

$$i\,(A_v, K_{R_1}, k) = 1, \quad R_1 > \max\big\{C\alpha_0/\varepsilon,\, r_0\big\}.$$

下面我们考虑 B_u 的情况. 由 (H_3) 条件知，存在 $\bar{r}_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$，使得任意 $v \in [0, \bar{r}_0]$，有

$$f_2(t,v) \geqslant M(1+\varepsilon)v, \quad t \in [0,1]. \tag{9}$$

取 $r_2 \in (0, \bar{r}_0)$，假设存在 $v_0 \in \partial K_{r_2}$, $\mu_0 \geqslant 0$，使得 $v_0 = B_u v_0 + \mu_0\phi$ 成立，则 $v_0 \geqslant B_u v_0$. 从0到1对不等式两边积分，有

$$\int_0^1 v_0(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 B_u v_0(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{M}\cdot M(1+\varepsilon)\int_0^1 v_0(t)\mathrm{d}t = (1+\varepsilon)\int_0^1 v_0(t)\mathrm{d}t.$$

由于 $v_0 \in \partial K_{r_2}$，从而

$$\int_0^1 v_0(t)\mathrm{d}t > 0.$$

两边消去 $\int_0^1 v_0(t)\mathrm{d}t$，则有 $1 \geqslant 1+\varepsilon$，这不可能. 从而由引理3得 $i\,(B_u, K_{r_2}, K) = 0$.

另一方面，由 $(\mathrm{H}_3),(\mathrm{H}_5)$ 可得

$$\begin{aligned} f_2(t,v)+h_2(u,v) \leqslant\ & M(1-\varepsilon)v+\frac{C_1}{2}+\frac{M}{2}\varepsilon v+\frac{C_1}{2} \\ =\ & M\Big(1-\frac{\varepsilon}{2}\Big)v+C,\quad t\in[0,1],\quad u,\,v\in\mathbf{R}^+. \end{aligned} \tag{10}$$

取 $\bar{R}_2>\max\{2C_1\alpha_0/\varepsilon,\bar{r}_0\}$. 下证

$$v\neq\mu B_u v,\quad u\in K_{\bar{R}_2},\quad \mu\in(0,1]. \tag{11}$$

假设存在 $v_0\in\partial K_{\bar{R}_2}$，$\mu_0\geqslant 0$，使得 $v_0=\mu_0 B_u v_0$，则有 $v_0\leqslant B_u v_0$. 从 0 到 1 对不等式两边积分，并注意到 (10) 式，有

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_0(t)\mathrm{d}t \leqslant\ & \int_0^1 B_u v_0(t)\mathrm{d}t \\ \leqslant\ & \frac{1}{M}\int_0^1 M\Big(1-\frac{\varepsilon}{2}\Big)v_0(t)\mathrm{d}t+\frac{C}{M}=\Big(1-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\int_0^1 v_0(t)\mathrm{d}t+\frac{C_1}{M}, \end{aligned}$$

即有

$$\int_0^1 v_0(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{2C_1}{M\varepsilon}.$$

因为 $v_0\in K$，有

$$\int_0^1 v_0(t)\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{M\alpha_0}\|v_0\|=\frac{\overline{R}_2}{M\alpha_0},$$

我们可得 $\bar{R}_2\leqslant 2C_1\alpha_0/\varepsilon$，这与 $\bar{R}_2$ 的取法矛盾. 由引理 3 可得 $i\,(B_u,K_{\bar{R}_2},K)=1$.

我们选取 $\bar{R}=\max\{R_1,\bar{R}_2\}$，$\bar{r}=\min\{\bar{r}_0,r_1\}$，则当 $r\in(0,\bar{r})$，$R>\bar{R}$ 时，有

$$i\,(A_v,K_{\bar{r}},K)=1,\quad i\,(A_v,K_{\bar{R}},K)=0,\quad i\,(B_u,K_{\bar{r}},K)=0,\quad i\,(B_u,K_{\bar{R}},K)=1.$$

由引理 5，有

$$\begin{aligned} & i\left(T,(K_{\bar{R}}\backslash\overline{K}_{\bar{r}})\times(K_{\bar{R}}\times\overline{K}_{\bar{r}}),K\times K\right) \\ =\ & i\left(A_v,K_{\bar{R}}\backslash\overline{K}_{\bar{r}},K\right)\times i\big(B_u,K_{\bar{R}}\backslash\overline{K}_{\bar{r}},K\big)=1\times(-1)=-1. \end{aligned}$$

从而，方程组 (1) 至少有一个正解.

4 应用

作为一个应用，我考虑下面方程组

$$\begin{cases} -u''(t)+Mu(t)=(1+t^2)u^{\frac{3}{2}}(t)+u^2(t)\frac{|\sin v(t)|}{v(t)}, & t\in[0,1], \\ -v''(t)+Mv(t)=(2-t)v^{\frac{1}{2}}(t)+v^{\frac{1}{3}}(t)\frac{|\sin u(t)|}{u(t)}, & t\in[0,1], \\ u(0)=u(1),\quad u'(0)=u'(1), \\ v(0)=v(1),\quad v'(0)=v'(1), \end{cases} \tag{12}$$

$M \in (0, \pi^2)$. 我们令

$$f_1(t,u) = (1+t^2)u^{\frac{3}{2}}, \quad f_2(t,v) = (2-t)v^{\frac{1}{2}},$$

$$h_1(u,v) = \begin{cases} u^2 \frac{|\sin v|}{v}, & v > 0, \\ u^2, & v = 0, \end{cases} \qquad h_2(u,v) = \begin{cases} v^{\frac{1}{3}} \frac{|\sin u|}{u}, & u > 0, \\ v^{\frac{1}{3}}, & u = 0, \end{cases}$$

则容易验证，方程组 (12) 满足 (H_1)-(H_5)，从而至少有一个正解.

参考文献:

[1] Dunninger D R, Wang H. Existence and multiplicity of positive solutions for elliptic systems[J]. Nonlinear Analysis, 1997, 29(9): 1051-1060

[2] Cheng X, Zhong C. Existence of positive solutions for a second-order ordinary differential system[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 312(1): 14-23

[3] Li F, Liang Z. Existence of positive periodic solutions to nonlinear second order differential equations[J]. Applied Mathematics Letters, 2005, 18(11): 1256-1264

[4] 李永祥. 二阶线性常微分方程的正周期解[J]. 数学学报，2002, 45: 481-488
Li Y X. Positive periodic solutions to the second order linear ordinary differential equtions[J]. Acta Mathematica Sinica, 2002, 45: 481-488

[5] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南：山东科学技术出版社 (第二版)，2001
Guo D J. Nonlinear Functional Analysis[M]. Jinan: Shandong Science and Technology Press (2nd ed.), 2001

Existence of Positive Solutions to Second Order Ordinary Differential Systems with Periodic Boundary Value

YANG Shu-qing

(Department of Mathematics, Xinzhou Normal College, Xinzhou, Shanxi 034000)

Abstract: The periodic boundary value problem has been an important area of investigation and it has been applied in a lot of practical problems. We mainly discuss in this paper the positive solutions to the second order ordinary differential systems with periodic boundary value. We obtain the existence of the positive solutions to the second order ordinary differential systems with periodic boundary value by employing the fixed-point theory, and establish the existence theorems of the positive solutions by using the first eigenvalue of the corresponding linear problem and the product of topology degree. Finally, we present an example to demonstrate the existence theorems of the positive solutions.

Keywords: positive solutions; periodic boundary value problem; the fixed-point index; topdogy degree

Received: 01 Apr 2009. **Accepted:** 07 Sep 2010.